



## Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΑΛΓΕΒΡΑ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 66.  
 B. Σχολικό βιβλίο ορισμός, σελίδα 132.  
 Γ. i) Σ      ii) Λ      iii) Σ      iv) Σ      v) Λ

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

α)  $x^2 - 4x + 3 = 0$  (1)  
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$   
 $(1) \Leftrightarrow x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 3).$

β) Το τριώνυμο  $x^2 - 6x + 8$ , έχει διακρίνουσα  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$  και ρίζες  
 $x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 4).$

Το πρόσημο του τριωνύμου, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$		
$x^2 - 6x + 8$		+	0	-	0	+

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε, ότι:  $2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (2, 4).$

γ)  $(x^{10} + 1)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) \geq 0$  (2)

Η παράσταση  $x^{10} + 1$  είναι θετική για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , διότι:  $x^{10} \geq 0 \Rightarrow x^{10} + 1 > 0$ .

Το πρόσημο του τριωνύμου  $x^2 - 4x + 3$  προκύπτει εύκολα, δεδομένου ότι από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες του, άρα εκτός των ριζών θα είναι θετικό και εντός των ριζών αρνητικό.

Το πρόσημο του τριωνύμου  $x^2 - 6x + 8$  έχει βρεθεί στον πίνακα του β) ερωτήματος.

Όροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πρόσημο της παράστασης  $(x^{10}+1)(x^2-6x+8)(x^2-4x+3)$ .

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$x^{10}+1$	+	+	+	+	+	+
$x^2-6x+8$	+	+	0	-	-	+
$x^2-4x+3$	+	0	-	-	+	+
Γινόμενο	+	0	-	+	-	+

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε, ότι:

$$(2) \Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ ή } 2 \leq x \leq 3 \text{ ή } x \geq 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, 3] \cup [4, +\infty).$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

$$x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0(1)$$

α)  $\Delta = \lambda^2 - 12\lambda = \lambda(\lambda - 12)$

Η (1) έχει δύο άνισες ρίζες, άρα  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 12) > 0 \Leftrightarrow (\lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 12)$ .

Το πρόσημο του τριωνύμου  $\lambda(\lambda - 4)$  προκύπτει εύκολα, δεδομένου ότι οι ρίζες του είναι 0 και 12, άρα εκτός των ριζών θα είναι θετικό.

β) Για  $\lambda = -4$ :  $x^2 + 4x - 12 = 0(1')$

i) Το γινόμενο των ριζών ισούται με  $\frac{\gamma}{\alpha}$ , άρα  $x_1 \cdot x_2 = \frac{-12}{1} = -12 < 0$ ,

άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

**Παρατήρηση** Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις ρίζες 2 και -6, που ασφαλώς είναι ετερόσημες.

ii) Η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός και η ρίζα  $x_2$  είναι αρνητικός, επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη, δεδομένου ότι ένας μη αρνητικός δεν είναι δυνατόν να είναι μικρότερος ή ίσος από έναν αρνητικό.

iii) Η (1'), έχει διακρινούσα  $\Delta = \lambda(\lambda - 12) = (-4)(-16) = 64$

Οι ρίζες της είναι:  $x = \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$ , επομένως,  $x_1 = 2$  και

#### Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

**Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά** η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

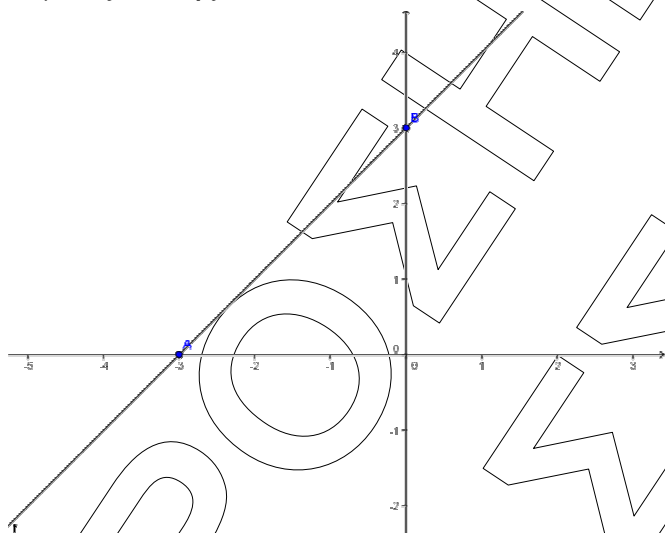
$$\sqrt[3]{x_1 \sqrt{x_1}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}.$$

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

- α) Για να σχηματίζει, η ευθεία με εξίσωση  $y = \left(|\lambda| - \frac{1}{2}\right)x + 3$ , γωνία  $45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$  θα πρέπει η κλίση της να ισούται με  $\text{εφ}45^\circ = 1$ .  
 Δηλαδή απαιτούμε να ισχύει:

$$|\lambda| - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{3}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{3}{2}\right).$$

- β) i) Για  $\lambda = \frac{3}{2}$  έχουμε  $f(x) = x+3$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = x + 3$ .



Αν  $y = 0$  είναι  $x = -3$ , ενώ αν  $x = 0$  είναι  $y = 3$ .

Άρα η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(-3,0)$  και τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $B(0,3)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

#### Α' τρόπος

- ii) Ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι της μορφής  $f(x) = ax + \beta$ , με  $a = 1 > 0$ .  
 Επομένως ο συντελεστής του  $x$  στον τύπο της συνάρτησης  $f$  είναι θετικός πραγματικός αριθμός, άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

- iii) Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$ , ισχύει:  $a^2 > -1 \Rightarrow f(a^2) > f(-1)$ .

#### Β' τρόπος

- ii) Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Επομένως δείξαμε ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

#### Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

Απαγορεύεται και διόκεται ποινικά και αστικά η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.

Συνεπώς η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

iii)  $f(\alpha^2) > f(-1) \Leftrightarrow \alpha^2 + 3 > 2 \Leftrightarrow \alpha^2 > -1$

Η τελευταία είναι αληθής για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ , αφού το πρώτο μέλος ως τετράγωνο πραγματικού είναι μη αρνητικός. Συνεπώς, λόγω των ισοδυναμιών, αληθεύει και η αρχική.



**Οροι και προϋποθέσεις χρήσης επαναληπτικών θεμάτων**

Όλα τα επαναληπτικά θέματα είναι αποκλειστικά πνευματική ιδιοκτησία της ΟΕΦΕ, βάσει του νόμου 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το νόμο 100/1975) η οποία και μόνο θα καθορίζει ρητά και συγκεκριμένα κάθε φορά τον **τρόπο, τον χρόνο και τον τόπο** της δημοσίευσής τους.

**Απαγορεύεται και διώκεται ποινικά και αστικά** η χρήση, η δημοσίευση, η αναδημοσίευση, η αναπαραγωγή, ολική, μερική ή περιληπτική, ή η απόδοση κατά παράφραση ή διασκευή του περιεχομένου τους, με οποιονδήποτε τρόπο, μηχανικό, ηλεκτρονικό, φωτοτυπικό, ηχογράφησης ή άλλο, χωρίς προηγούμενη γραπτή άδεια της ΟΕΦΕ. Κατ' εξαίρεση στο διαδίκτυο και στα λοιπά ΜΜΕ επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί-αναρτηθεί το υλικό των Επαναληπτικών θεμάτων με τις λύσεις τους ΜΟΝΟ μετά την ανάρτησή τους από την ΟΕΦΕ στο επίσημο ιστολόγιό της, με σκοπό τη μελέτη, την ανάλυση ή την πραγματοποίηση διδασκαλίας από τον επισκέπτη, υπό την προϋπόθεση ότι τα στοιχεία που θα αντληθούν δε θα αλλοιωθούν ούτε θα χρησιμοποιηθούν παραπλανητικά, ενώ υφίσταται και η υποχρέωση, σε περίπτωση οποιασδήποτε χρήσης, να αναφέρεται ο δικαιούχος των πνευματικών δικαιωμάτων του υλικού.